

Topologia
Lista dodatkowa 2

Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną i niech $A \subset X$. Wnętrze $\text{int } A$, domknięcie \bar{A} , brzeg $\text{bd } A$ oraz pochodną A^d zbioru A definiujemy następującymi warunkami:

$$\begin{aligned}x \in \text{int } A &\iff \exists_{x \in U \in \tau} U \subset A, \\x \in \bar{A} &\iff \forall_{x \in U \in \tau} U \cap A \neq \emptyset, \\x \in \text{bd } A &\iff \forall_{x \in U \in \tau} U \cap A \neq \emptyset \wedge U \setminus A \neq \emptyset, \\x \in A^d &\iff \forall_{x \in U \in \tau} (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.\end{aligned}$$

Element x zbioru A^d nazywamy *punktem skupienia* zbioru A .

Zbiór A nazywamy *gęstym*, gdy $\bar{A} = X$.

Zbiór A nazywamy *brzegowym*, gdy $\text{int } A = \emptyset$.

Zad 1. Wyznaczyć wnętrze, domknięcie, brzeg oraz pochodną danego podzbioru prostej euklidesowej \mathbb{R} :

$$\begin{aligned}A &= (0, 3], & B &= (-\infty, 5], & C &= (1, 2) \setminus \mathbb{Q}, \\D &= \left\{ x = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{x : |x| > 2\}, \\E &= \left\{ x = 2^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{x : |x - 4| < 1\}, \\F &= \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup ([1, 2] \cap \mathbb{Q}).\end{aligned}$$

Czy któryś z podanych zbiorów jest brzegowy lub gęsty?

Zad 2. Na płaszczyźnie euklidesowej \mathbb{R}^2 wyznaczyć wnętrze, domknięcie, brzeg oraz pochodną zbioru

$$\begin{aligned}A &= [0, 1] \times [0, 1), & B &= \left\{ \left(\frac{1}{n}, (-1)^n \right) : n \in \mathbb{N} \right\}, \\C &= \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}\}, & D &= \{(x, y) : y = \sin \frac{1}{x}, x > 0\}, \\E &= \left\{ (x, y) : y = \frac{1}{n}x, n \in \mathbb{N} \right\}, & F &= \left\{ (x, y) : y^2 + x^2 = \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2, n \in \mathbb{N} \right\}, \\G &= \{(x, y) : y = qx, q \in \mathbb{Q}\}, & H &= \{(x, y) : x \in [1, 2) \cap \mathbb{Q}, y \in (1, 2) \setminus \mathbb{Q}\}.\end{aligned}$$

Czy któryś z powyższych zbiorów jest gęsty lub brzegowy?

Zad 3. Wyznaczyć wnętrze, domknięcie, brzeg oraz pochodną podzbioru

$$A = (\text{Glowa} \setminus (\text{Oczy} \cup \text{Usta})) \cup \{(2, 4), (4, 4)\}$$

płaszczyzny euklidesowej (\mathbb{R}^2, d) (d jest metryką euklidesową), gdzie

$$\begin{aligned}\text{Glowa} &= \{(x, y) : d((x, y), (3, 3)) \leq 3\}, & \text{Usta} &= \left\{ \left(2, 2 + \frac{k}{4} \right) : k = 0, \dots, 8 \right\}, \\ \text{Oczy} &= \left\{ (x, y) : d((x, y), (2, 4)) \leq \frac{1}{2} \text{ lub } d((x, y), (4, 4)) \leq \frac{1}{2} \right\}.\end{aligned}$$